Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 2

Zbiory borelowskie. Miary

Def. Topologią na X nazywamy rodzinę $\mathcal{O}$ podzbiorów X taką, że

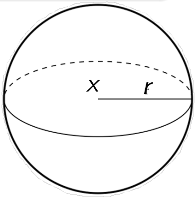
- T1 $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ *(zawiera zbiór pusty i całą przestrzeń)*
- T2 $U, V \in \mathcal{O} \Longrightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$ *(zamknięta na skończone przekroje)*
- T3 $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{O} \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ *(zamknięta na dowolne sumy)*

Parę $(X, \mathcal{O})$ nazywamy **przestrzenią topologiczną**, a elementy $\mathcal{O}$ nazywamy **zbiorami otwartymi** w tej przestrzeni.

Uw. Topologia nie jest (zazwyczaj) zamknięta na dopełnienia (dopełnienie zbioru otwartego nazywamy zbiorem **domkniętym**)

Prz. W przestrzeni metrycznej (X, d) topologią jest

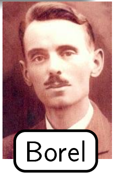
$$\mathcal{O} := \{U \subseteq X : U \text{ jest sumą kul otwartych}\},$$



kulą otwartą o środku w $x \in X$ i promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór $K(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$

Uw. Głównie będziemy rozważać $X = \mathbb{R}^n$ z topologią euklidesową, tzn. zadaną przez metrykę euklidesową $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.

Def. Elementy σ-algebry $\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O})$ generowanej przez zbiory otwarte nazywamy **zbiorami borelowskimi** w przestrzeni $(X, \mathcal{O})$.



„zbiór borelowski, to taki, który można uzyskać ze zbiorów otwartych za pomocą przeliczalnych sum, przekrojów, bądź różnic i dopełnień”

Prz. Zbiory $\{a\}$, $[a, b)$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, są borelowskie na prostej $\mathbb{R}$

$\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$, $[a, b) = (a, b) \cup \{a\}$, $\mathbb{Q} = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}}\{a\}$

Uw. Można wykazać, że w $\mathbb{R}^n$ istnieją zbiory nieborelowskie, ale *„nie można ich zobaczyć”* (dowód korzysta z pewnika wyboru)

Stw. $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{D})$, gdzie $\mathcal{D}$ jest rodziną zbiorów domkniętych w X

Dowód: Przypomnijmy, że $A \in \mathcal{D} \iff A' \in \mathcal{O}$. Zatem

$$A \in \mathcal{D} \Longrightarrow A' \in \mathcal{O} \overset{A=(A')'}{\Longrightarrow} A \in \sigma(\mathcal{O}).$$

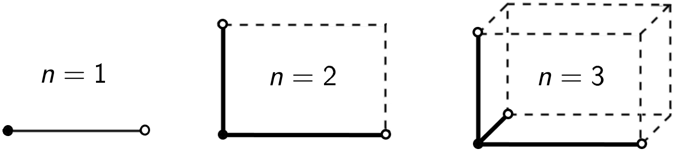
Czyli $\mathcal{D} \subseteq \sigma(\mathcal{O})$, skąd $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq \sigma(\mathcal{O})$. Analogicznie

$$U \in \mathcal{O} \Longrightarrow U' \in \mathcal{D} \overset{U=(U')'}{\Longrightarrow} U \in \sigma(\mathcal{D}).$$

Czyli $\mathcal{O} \subseteq \sigma(\mathcal{D})$, skąd $\sigma(\mathcal{O}) \subseteq \sigma(\mathcal{D})$. Zatem $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{D})$ $\blacksquare$

Rozważmy rodzinę n-wymiarowych **prostopadłościanów półotwartych**

$$\mathcal{P} := \{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$



Oraz ich wersję o wierzchołkach o współrzędnych wymiernych

$$\mathcal{P}_w := \{[a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \cdots \times [a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{Q}\}$$

rodzina przeliczalna

Tw. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{P}_w)$.

Dowód: $[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_n, b_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a_1 - \frac{1}{n}, b_1) \times \ldots \times (a_n - \frac{1}{n}, b_n)$

Zatem $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ i skoro $\mathcal{P}_w \subseteq \mathcal{P}$, to $\sigma(\mathcal{P}_w) \subseteq \sigma(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Czyli wystarczy pokazać, że $\mathcal{O} \subseteq \sigma(\mathcal{P}_w)$, bo wtedy $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \sigma(\mathcal{P}_w)$.

Niech zatem $U \in \mathcal{O}$. Pokażemy, że $U = \bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_w \\ P \subseteq U}} P \in \sigma(\mathcal{P}_w)$

zbiór otwarty jest przeliczalną sumą prostopadłościanów

Inkluzja $\bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_w \\ P \subseteq U}} P \subseteq U$ jest oczywista. Aby wykazać inkluzję przeciwną:

Weźmy $x \in U$. Skoro U otwarty to $\exists_{r>0}\, K(x,r) \subseteq U$. W kulę zawsze możemy wpisać prostopadłościan. Dokładniej, dla $\varepsilon_1^{\pm}, \ldots, \varepsilon_n^{\pm} < \frac{r}{\sqrt{n}}$

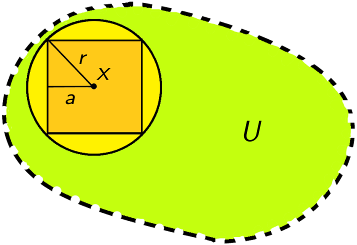
$$P := [x_1 - \varepsilon_1^-, x_1 + \varepsilon_1^+) \times \cdots \times [x_n - \varepsilon_n^-, x_n + \varepsilon_n^+) \subseteq K(x,r)$$

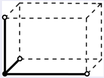
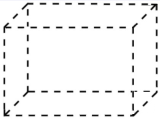
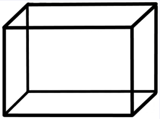
Możemy dobrać $\varepsilon_i^{\pm}$ tak, aby $P \in \mathcal{P}_w$. Skoro

$$x \in P \subseteq K(x,r) \subseteq U,$$

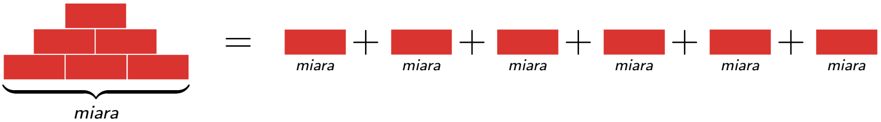
to $x \in \bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_w \\ P \subseteq U}} P$. Czyli $U \subseteq \bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_w \\ P \subseteq U}} P$.

Zatem $U = \bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_w \\ P \subseteq U}} P$. Stąd $\mathcal{O} \subseteq \sigma(\mathcal{P}_w)$. ■



Uw. Z dowodu widać, że teza twierdzenia pozostaje prawdziwa jeśli prostopadłościany półotwarte  zastąpimy **otwartymi**  lub **domkniętymi** 

Miara={długość, objętość, waga, prawdopodobieństwo, moc zbioru, ...}



Oznaczenie: $A \sqcup B = A \cup B$ oraz $A \cap B = \emptyset$

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ oraz } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ dla } i \neq j$$

suma rozłączna

Def. Miarą na przestrzeni mierzalnej $(X, \mathcal{F})$ nazywamy funkcję $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ taką, że $\mu(\emptyset) = 0$ oraz

$$\begin{array}{c} \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \\ \text{parami rozłączne} \end{array} \Longrightarrow \mu\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \qquad (\sigma\text{-}\textbf{addytywność})$$

Trójkę $(X, \mathcal{F}, \mu)$ nazywamy **przestrzenią z miarą**, a wartość $\mu(A)$ miarą zbioru $A \in \mathcal{F}$ w tej przestrzeni.

Uw. Jeśli $\mu \not\equiv \infty$ to σ-addytywność implikuje $\mu(\emptyset) = 0$.

Uw. Miara unormowana (tzn. $\mu(X) = 1$) $\equiv$ **prawdopodobieństwo**

Stw. (Podstawowe własności miary)

Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ przestrzeń z miarą oraz $A, B \in \mathbb{F}$. Wtedy

1. $A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ *(skończona addytywność)*
2. $A \subseteq B \implies \mu(A) \leqslant \mu(B)$ *(monotoniczność)*
3. $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$, o ile $\mu(A \cap B) < \infty$ *(miara różnicy)*
4. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, o ile $\mu(A \cap B) < \infty$ *(zasada włączeń i wyłączeń)*
5. $\mu(A \cup B) \leqslant \mu(A) + \mu(B)$ *(skończona podaddytywność)*

Dowód: (1) Kładąc $A_1 := A$, $A_2 = B$ oraz $A_n = \emptyset$ dla $n > 2$. Mamy

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) \overset{\sigma\text{-addytywność}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \overset{\mu(\emptyset)=0}{=} \mu(A) + \mu(B).$$

(2) $A \subseteq B \implies B = A \sqcup (B \setminus A) \overset{(1)}{\implies} \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A)$

(3) $B = (B \setminus A) \sqcup (A \cap B) \overset{(1)}{\implies} \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)$

(4),(5) Stąd, że $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$ oraz $(B \setminus A) \sqcup (A \cap B) = B$ mamy

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \overset{(1)}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \overset{(1)}{=} \mu(A) + \mu(B) \blacksquare$$